А. Выравнивание вещественных чисел

A. Выравнивание вещественных чисел

- Считать каждое число **как строку**
- Найти для каждого числа позицию точки a_i
- Найти максимум $\mathrm{m} = \max a_i$
- Перебрать все i от 1 до n и вывести сначала $\mathrm{m} - a_i$ символов #, а затем само число

B. Игра в 9

B. Игра в 9

- Факт 1: число делится на 9, если сумма цифр числа делится на 9
- Факт 2: число дает в остатке при делении на 9 тоже число, что и сумма цифр при делении на 9
- Вместо того, чтобы рассматривать число будем рассматривать остаток от деления на 9 суммы цифр числа

B. Игра в 9

- Состояние игры можно описать парой чисел (i, j), где i – количество цифр, записанных на доске, j – остаток от деления записанных цифр на 9
- Пусть игра находится в состоянии (i, j). Тогда после дописывания цифры k игра переходит в состояние $(i + 1, (j + k) mod\ 9)$
- Вычислим матрицу a размером $n \times 9$:

$$a[i, j] = \begin{cases} true, \text{позиция } (i, j) \text{ выигрышная для Пети,} \\ false, \text{позиция } (i, j) \text{ проигрышная для Пети} \end{cases}$$

- Ответ к задаче: если $a[0,0] = true$, то выиграет Петя, в противном случае – Гена.

B. Игра в 9

- Заполним таблицу данными, которые известны:
  - $a[n, 0] = false$
  - $a[n, i] = true$, для i от 1 до 8.
- Остальная элементы $a[i, j]$ заполняем с предпоследнего столбца следующим образом:
  - Если i четно (т.е. ход Пети), то $true$, если существует такое k, что $a[i + 1, (j + k) \ mod \ 9] = true$ и $false$ в противном случае.
  - Если i нечетно (т.е. ход Гены), то $false$, если существует такое k, что $a[i + 1, (j + k) \ mod \ 9] = false$ и $true$ в противном случае.

C. Преобразование числа

C. Преобразование числа

- Рассмотрим несколько случаев:
  - $m \leq n$, то ответ YES, так как путем преобразования $n = (n - 1) \cdot 1$, можно получить любое число от 1 до $n - 1$.
  - $n \geq 5$, от ответ YES, так как из числа n можно получить любое сколь угодно большое число. Например, 5 = 2 + 3 => 6, 6 = 3 + 3 => 9…
  - В остальных случаях ответ NO.

D. Марракеш

D. Марракеш

- Задача на «технику»
- Перебрать все возможные направления ходов Ассама
- Для каждого направления просимулировать движение Ассама на 1, 2, 3 и 4 клетки и посчитать сумму выплаты a_i, например, с помощью поиска в глубину или поиска в ширину
- Для каждого направления посчитать величину $s_i \ = a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4$
- Найти минимум из s_i и если минимальных значений несколько, то выбрать среди них направление соответствующее лексикографически наименьшей букве

E. Мухи на плоскости

E. Мухи на плоскости

- Позиция *i*-й мухи в момент времени t описывается парой уравнений (функциями координат от времени):
- $x_i(t) = x_{0_i} + v_{x_i}t$
- $y_i(t) = y_{0_i} + v_{y_i}t$

E. Мухи на плоскости

- Как определить, что три точки, заданные координатами, лежат на одной прямой?
- Нужно поработать с уравнением прямой
- $y = kx + b$?
- Надо вывести k и b, а еще у этого уравнения есть проблемы с прямыми $x = const$
- Есть способ лучше!

E. Мухи на плоскости

- Уравнение прямой, проходящей через две точки, обычно записывают так:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

- Тут все еще есть проблема с вертикалями и горизонталями, заменим пропорцию на произведение

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

Это уравнение справедливо и для наших особых прямых

Е. Мухи на плоскости

- Если мухи в момент времени t находятся на одной прямой, то их координаты удовлетворяют уравнению прямой. Подставим координаты третьей мухи в уравнение.

$$(x_3(t) - x_1(t))(y_2(t) - y_1(t)) = (y_3(t) - y_1(t))(x_2(t) - x_1(t))$$

- Осталось раскрыть скобки и функции координат. Так мы получим довольно большое, но всего лишь квадратное уравнение относительно t

Е. Мухи на плоскости

$$at^2 + bt + c = 0$$

- Выражения для a, b и c выглядят немного страшновато, поэтому тут их нет, но они легко вычисляются в программе
- Важно обработать особые случаи:
  - $a = 0$ – уравнение вырождается в линейное – например, если пара мух движутся вдоль прямой, на которой они находятся
  - $a = 0, b = 0$ – уравнение вырождается в тождество (мухи всегда на одной прямой) или в «глупость» типа $2 = 0$ (мухи никогда не на прямой)

F. Фоторамка

F. Фоторамка

- В первую ячейку Вася может вставить любую из N фотографий
- Во вторую – любую из $N-1$ оставшихся
- …
- Комбинаторика подсказывает нам, что общее количество комбинаций
$$N(N-1)(N-2)(N-3)$$
- Если у Васи меньше четырех фотографий, то рамку он заполнить не может и ответ 0

G. Сны о скобках

G. Сны о скобках

- Будем называть *балансом позиции* количество еще незакрытых открывающих скобок, которые мы встретили не правее текущей позиции
- Переход вправо:
  - Встретили «(« – еще одна незакрытая скобка, баланс +1
  - Встретили «)« – одна скобка закрылась, баланс -1

G. Сны о скобках

- ПСП обладает следующими свойствами
  - Баланс любой позиции неотрицательный
  - Баланс последней позиции равен нулю
- Если мы удалим из ПСП одну скобку – эти свойства нарушатся
- Если удалить открывающую скобку – то все балансы правее уменьшатся на 1, в частности, нулевые станут равны -1.
- Если удалить закрывающую – все балансы правее увеличатся на 1, баланс последней позиции станет равен 1

G. Сны о скобках

- Посчитаем балансы данной нам строки
- Если есть какие-то другие нарушения балансов – то исходная строка была не ПСП, поэтому восстановить никак нельзя – ответ 0.
- Не забывайте также, что мы не можем восстановить ПСП из ПСП ☺
- Теперь у нас есть два случая:
  - баланс последней позиции равен 1
  - баланс последней позиции равен -1

G. Сны о скобках

- Начнем со второго (-1)
- Отрицательных балансов может быть несколько
- Поэтому мы можем быть уверены, что открывающую скобку удалили из позиции не правее первого появления такого баланса
- Само построение балансов подсказывает нам, что «починить» проблему можно, вставив открывающую скобку в любую позицию до первого появления отрицательного баланса
- Так что, ответ – индекс первого появления (-1)?

G. Сны о скобках

- Не совсем так
- Допустим, у нас есть строка ())
- Индекс – 3. Попробуем повставлять скобку:
  (())
  (()) – хм, где-то я уже это видел
  ()()
- Правильный ответ – 2
- Чтобы не подсчитывать многократно вставки в разные позиции плотных групп открывающих скобок можно считать только вставки перед закрывающими скобками

G. Сны о скобках

- А как же первый случай, с балансом 1?
- Можно зеркально отразить последовательность (перевернуть и заменить все скобки на противоположные)
- У отраженной последовательности получится баланс -1, а восстановленных из нее ПСП будет столько же

H. Спуск полос

H. Спуск полос

- Задача на реализацию – сделайте то, что написано
- Надо просто понять как ложатся листки
- Увеличим N до кратного четырем, а при печати вместо лишних листов будем выводить «-»
- Выводим листы в следующем порядке ($i \coloneqq 0..\frac{N}{4} - 1$):

$$N, 1; N - 2, 3; \ldots; N - 2i, 1 + 2i; \ldots; \frac{N}{2} + 2, \frac{N}{2} - 1$$

$$2, N - 1; \ldots; 2(i + 1), N - 2(i + 1) - 1; \ldots; \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1$$

I. Изи

I. Изи

- Прочитать число N
- Вывести число N-1

J. Затмение

J. Затмение

- В зависимости от отношения угловых скоростей возможны два случая
- Первый случай – если отношение рационально
- Второй случай – отношение иррационально
- Поскольку линейные скорости целые, то необходимо проверить рациональность отношения радиусов орбит

J. Затмение

- Отношение радиусов орбит

$$\sqrt{\frac{x_1 \cdot x_1 + y_1 \cdot y_1}{x_2 \cdot x_2 + y_2 \cdot y_2}} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$$

  где Z_1 и Z_2 – целые числа

- Дробь необходимо сократить (если это возможно), поделив и числитель, и знаменатель на их НОД
- В этом случае отношение будет рационально тогда и только тогда, когда и числитель, и знаменатель дроби являются квадратами

J. Затмение

- Если отношение иррационально, то оптимальный ответ будет, когда все 4 центра (планет и звезд) лежат на одной прямой
- Достаточно перебрать все возможные такие расположения и выбрать оптимальный ответ

J. Затмение

- Если отношение рационально, то периоды вращения планет вокруг своих звезд имеют отношение

$$\frac{Z_1 \cdot V_2}{Z_2 \cdot V_1}$$

- Соответственно, положение планет в интересные моменты будет иметь период

$$Z_i \cdot V_j \le 10000$$

- Достаточно перебрать такое количество интересных положений (для каждого из интересных моментов каждой планеты) и выбрать оптимальный ответ

J. Затмение

- Для нахождения ответа нужно уметь находить площадь пересечения окружностей

K. Парковка

K. Парковка

- Рассмотрим перемещение автомобиля Васи между поворотами
- Перед каждым поворотом Вася должен снизить скорость до 1 и дальше продолжить движение до нового поворота или до выезда с парковки
- Поскольку перед поворотом скорость всегда 1, то состояние автомобиля Васи задается только его положением
- Итого, имеется $N \cdot M$ состояний

К. Парковка

- Запустим алгоритм Дейкстры (с использованием бинарной кучи или контейнеров STL) на данных состояниях
- Для каждого состояния Вася может сделать до (N+M-1) переходов по прямой (в одном из 4 направлений) до следующего поворота или выезда
- Для быстрой работы алгоритма необходимо посчитать оптимальное время перемещения по прямой длины K с торможением (до поворота) и без торможения (до выезда)

К. Парковка

- Предподсчет для каждого K легко сделать за O(K), итого, общая сложность предподсчета $O(\max(N,M)^2)$
- В алгоритме Дейкстры имеется $N \cdot M$ состояний, каждое из которых имеет переходы в максимум $(N \cdot M-1)$ состояние. Тогда общая сложность алгоритма $O(N \cdot M \cdot \log(N \cdot M) \cdot (N+M))$

L. Пушка Гаусса

L. Пушка Гаусса

- Для оптимального перехода между двумя точками может потребоваться использование резисторов (даже если точки находятся на одном кольце)
- Поскольку время перехода по резисторам константно, то в оптимальном решении достаточно использовать лишь ближайшие к одной из конечных точек резисторы

L. Пушка Гаусса

- На каждый запрос найдем бинарным поиском ближайший слева и ближайший справа резисторы (с учетом зацикленности на окружности)
- Для нас интересными являются конечные точки найденных резисторов (максимум 4 резистора, по 2 конечные точки на каждом) и точки запроса
- Итого имеется не более 10 точек, которые могут содержаться в оптимальном пути

L. Пушка Гаусса

- Изначально расстояние между точками a_1 и a_2 одного кольца i равно
$$T_i \cdot (\min(|a_1 - a_2|, 2 * P_i \; - \; |a_1 - a_2|)$$
- Расстояние между точками разных колец равно T, если это точки одного резистора
- На данном графе из 10 вершин нужно запустить поиск (Дейкстра, Флойд) оптимального расстояния между двумя вершинами запроса